

Examen Final OMMEB

Nivel III.

5 de Mayo del 2019.

Parte A.

1. ¿Cuál es el último dígito de $(2^{102} + 2^{103})^{2019}$?
2. Se tiene una cuadrícula de 5×5 cuyo cuadrado central está coloreado de rojo. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar usando algunos de los cuadrados unitarios de la cuadrícula, que contienen el cuadrado rojo?
3. Sea ABC un triángulo rectángulo en A . La bisectriz por A corta a la hipotenusa en R . La perpendicular por R a AR corta a AB en su punto medio M . Sea P el punto medio de AM . Si $AC = 1$. Encuentra RP .
4. Encuentra todos los enteros positivos n tales que
$$\frac{1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1}{2 + 4 + 6 + \dots + 2n} = \frac{2017}{2018}.$$
5. ¿Cuántos enteros z satisfacen que
$$(z - 1)(z - 2) \dots (z - 2020)$$
es negativo?
6. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Marcamos M el punto medio de AC y N el de BC además T el punto en AB de manera que CT es perpendicular a AB . Si el área de ABC es 2016 cm^2 ¿Cuál es el área del triángulo TMN ?
7. Se tiene una cuadrícula de 4×5 la cual tiene una única línea del tablero como eje de simetría. Se tomará un triángulo con vértices sobre los de la cuadrícula pero que no tenga vértices sobre el eje de simetría. ¿Cuántos de estos triángulos son cortados por el eje de simetría?
8. Se tienen tres grupos el A con los números del 1 al 6, el B con los números del 1 al 7 y el C con los números del 1 al 5. Se forman todos los posibles que se puedan obtener multiplicando un número de cada conjunto. Estos 210 números se suman. ¿Cuál es el resultado?
9. Sea n un entero positivo. Si $2n$ tiene 30 divisores y $3n$ tiene 32 divisores. ¿Cuántos divisores tiene $6n$?
10. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un divisor de $(4034)^{2017}$ sea par?
11. ¿Para cuántos naturales n menores que 100, $n^2 + 3n + 7$ y n tienen el mismo dígito de las unidades?
12. Dos circunferencias de radios 9 y 4 son tangentes exteriormente en un punto P . La tangente común a ellas que no pasa por P las toca en puntos A y B . ¿Cuál es la medida de AB ?

Parte B.

1. Demuestra que 11 divide a $7^w + 2^{2w}$ para todo entero impar w mayor que 1.
2. Considera una circunferencia de diámetro XY . Se toma un punto P en la circunferencia y se baja la perpendicular B a XY . También se toma el punto medio M de PB . XM corta a la circunferencia en T . Si $PB = 6$ y $BY = 9$. Encuentra TP .
3. Ordena de menor a mayor los números
 - (a) $-(\frac{1}{3})^{2000}$
 - (b) $1 + (-\frac{1}{2})^{4003} - \sqrt[100]{\frac{2018}{2019}}$
 - (c) $2(-\frac{1}{2})^{2999}$.